GRAWITACJA

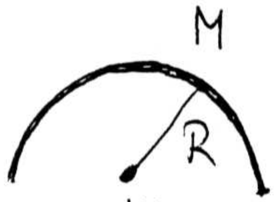
1. Trzy równe masy m znajdują się w trzech rogach kwadratu o długości boku l. Znajdź wektor natężenia pola grawitacyjnego $\mathbf{G(r)}$ i potencjał tego pola w czwartym rogu kwadratu.
2. Jednorodny pręt ma kształt półokręgu o promieniu R (Rys. 1). Policzyć siłę grawitacji wywieraną na masę m umieszczoną w środku półokręgu. Znaleźć energię potencjalną układu.
3. Znaleźć potencjał i natężenie pola grawitacyjnego w punkcie odległym o r od środka jednorodnej powłoki sferycznej (grubość jest zaniedbywalna w porównaniu z promieniem) o masie M i promieniu R. Przedyskutować otrzymane rozwiązania w zależności od wartości odległości r. Nie korzystać z prawa Gaussa.
4. Znaleźć potencjał i natężenie pola grawitacyjnego w punkcie odległym o r od środka jednorodnej kuli o masie M i promieniu R. Przedyskutować otrzymane rozwiązania w zależności od wartości odległości r.
5. We wnętrzu jednorodnej kuli o masie M i promieniu R wydrążono kulisty otwór o promieniu r (Rys. 2). Znaleźć siłę wywieraną przez taką masę na masę punktową znajdującą się w odległości x od środka kuli. Rozważyć przypadki: a) $x \geq R$, b) $R > x \geq r$, c) $x \leq r$.
6. Na przedłużeniu jednorodnego pręta o masie M i długości l znajduje się w odległości h masa punktowa m. Znajdź energię potencjalną tego układu. Policz siłę wywieraną przez pręt na masę. Rozwiąż to samo zadanie dla masy punktowej znajdującej się na symetralnej pręta.
7. Jak blisko siebie powinny znaleźć się dwie gwiazdy o tych samych gęstościach masy, aby większa z nich wessała mniejszą? Przyjąć, że gwiazdy są kulami o promieniach R i r.
8. Przez kulę ziemską wzdłuż jej średnicy poprowadzono tunel. Nie został on należycie zabezpieczony i wpadł do niego kozioł. Napisać równanie ruchu kozła w tunelu, policzyć okres drgań i znaleźć jego prędkość w geometrycznym środku Ziemi.
9. Policzyć prędkość satelity Ziemi poruszającego się po orbicie o promieniu minimalnie większym od promienia Ziemi, czyli tuż nad jej powierzchnią (I prędkość kosmiczna). Porównać ją z prędkością kozła w centrum Ziemi. Wyjaśnić jaki jest związek między ruchem kozła i ruchem satelity.
10. Rozwiązać zad. 8 z tunelem będącym cięciwą Ziemi poprowadzoną w odległości h od centrum Ziemi.
11. Do tunelu z zad. 8 wrzucono ciało z prędkością początkową v_0. Znaleźć czas lotu ciała do środka Ziemi.
12. Czarną dziurą nazywamy obiekt, w którym siły grawitacji są tak duże, że nie może go opuścić żadna cząstka nawet foton. Oszacuj promień jaki powinna mieć gwiazda o masie M, aby stała się czarną dziurą. Policz ten promień dla Słońca o masie $M = 2 \times 10^30\ kg$, wiedząc że $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ i $c = 3 \times 10^8\ m/s$.
13. Znaleźć wartość ciśnienia grawitacyjnego we wnętrzu Ziemi zakładając, że Ziemia jest jednorodną kulą o gęstości ϱ i promieniu R.
14. Znaleźć wartość ciśnienia grawitacyjnego w odległości r_0 od środka Ziemi zakładając, że gęstość masy jest liniową funkcją odległości od środka Ziemi r: $\varrho = \varrho_2 - \varrho_1 \frac{r}{R}$, R jest promieniem Ziemi, $\varrho_2 > \varrho_1$.
15. W czterech rogach kwadratu o długości boku l znajdują się masy m_1, m_2, m_3 i m_4. Znajdź grawitacyjną energię potencjalną tego układu.
16. Znaleźć grawitacyjną energię potencjalną jednorodnej powłoki sferycznej o promieniu R i masie M.
17. Znaleźć grawitacyjną energię potencjalną jednorodnej kulistej planety o masie M i promie-

niu R.

18. Znaleźć pracę, jaką trzeba wykonać, aby ciało o masie m przenieść z: a) powierzchni, b) środka jednorodnej kulistej planety o masie M i promieniu R do nieskończoności.

19. Największa odległość komety Halleya od Słońca to $h = 35.4R_{ZS}$, gdzie R_{ZS} jest odległością Ziemi od Słońca, a najmniejsza $l = 0.59R_{ZS}$. Prędkość liniowa ruchu komety w punkcie najbardziej odległym od Słońca, tzw. punkcie odsłonecznym, wynosi $910m/s$. Jaka jest prędkość komety, gdy jest ona najbliżej Słońca, czyli w punkcie przysłonecznym?

20. Asteroida Apophis (egipski demon Niszczyciel) - ważąca 79 mln ton skała o średnicy 400 metrów - znajdzie się w kwietniu 2029 roku w bezpośrednim sąsiedztwie Ziemi ($M_z = 6 \cdot 10^{24}$ kg). Przyjmijmy, że w odległości $r_a = 10R_z$ ($R_z = 6.4 \cdot 10^6$ m jest promieniem Ziemi) asteroida porusza się z prędkością $v_a = 10$ km/s radialnie w kierunku centrum Ziemi. Z jaką prędkością należy wystrzelić z powierzchni Ziemi pocisk o masie 1 tony, tak aby po jego wbiciu się w asteroidę stała się ona satelitą Ziemi krążącym po orbicie o promieniu r_a?



Rys. 1

Rys. 2